École Normale Supérieure — Année 2019/20

Intégration et probabilités
TD9 : Espaces L^p

Exercice 1 (Lemme de Scheffé)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, soit (f_n) une suite de fonctions mesurables vérifiant $f_n \to f$ p.p. et soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable.

1. Montrer que s'il existe $p_0 > 0$ tel que $f \in L^{p_0}(E, \mathcal{A}, \mu)$ alors $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
2. Si μ est une probabilité montrer que $\|f\|_p$ est une fonction croissante de p.
3. On suppose que μ est une probabilité et qu'il existe $p_0 > 0$ tel que $f \in L^{p_0}$. Montrer que $\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp\left(\int_E \log|f|\, d\mu\right)$. On pourra commencer par déterminer soigneusement

$$\lim_{p\to 0} \int_E |f|^p\, d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{p\to 0} \int_E \frac{|f|^p - 1}{p}\, d\mu.$$

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure finie. Soient $f, f_1, f_2, \ldots$ des fonctions mesurables, on dit que f_n converge vers f en mesure si $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que si $f_n \to f$ dans L^p pour un certain $p \geq 1$ (ou même $p > 0$ d'ailleurs) alors $f_n \to f$ en mesure.
2. Montrer que si $f_n \to f$ p.p. alors $f_n \to f$ en mesure. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse. En revanche montrer que si $f_n \to f$ en mesure on peut extraire de (f_n) une sous-suite qui converge vers f p.p.
3. On note $L^0 = L^0(E, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables, quotienté par la relation d'égalité presque partout. Montrer qu'on définit une distance sur L^0 en posant

$$d(f, g) = \int_E \min(|f - g|, 1)\, d\mu,$$

   et que cette distance métrise la topologie de la convergence en mesure. Montrer de plus que l'espace métrique (L^0, d) est complet.
4. Montrer en revanche que la topologie de la convergence p.p. n'est pas métrisable.

Exercice 4 (Retour sur l'uniforme intégrabilité)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable, la mesure μ étant supposée finie.

1. Montrer que si une famille $\mathcal{F}$ de fonctions mesurables est bornée dans L^p pour un certain $p > 1$ alors elle est uniformément intégrable.
2. Montrer que si une suite de fonctions converge p.p. et est bornée dans L^p pour un certain $p > 1$ alors elle converge dans L^1, et même dans L^q pour pour tout $q < p$.

3. (Lemme de de la Vallée Poussin) Montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, convexe, croissante, vérifiant $G(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} G(x)/x = +\infty$ (on parle de fonction de Young) telle que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \left\{ \int_E G(|f|)\, d\mu \right\} < +\infty.$$

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $p \in [1; +\infty[$.

1. Montrer que les fonctions étagées ~~positives~~ h vérifiant $\mu(h \neq 0) < +\infty$ sont denses dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Soit K un compact et soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $K \subset U$. Montrer qu'il existe φ continue à support compact vérifiant $\mathbf{1}_K \leq \varphi \leq \mathbf{1}_U$.
3. Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m_d)$, en notant m_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 6. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note τ_h l'opérateur de translation : $\tau_h f(x) = f(x+h)$ pour toute fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que τ_h est une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m_d)$, pour tout $p \geq 1$.
2. Soit $p \in [1; +\infty[$ et soit $f \in L_p$, montrer que $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.
3. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure strictement positive. Montrer que l'ensemble $A - A$ contient un voisinage de 0.