

Intégration et probabilités
TD8 : Radon-Nikodym etc...

Exercice 1. Montrer par un exemple que le théorème de Radon-Nikodym est faux si la mesure de référence n'est pas σ -finie.

Exercice 2. On note m la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- (Lemme de Vitali en dimension 1) Soit I_1, \dots, I_n une famille finie d'intervalles. Montrer qu'on peut en extraire une sous-famille I_{n_1}, \dots, I_{n_k} d'intervalles deux à deux disjoints telle que $m(\cup I_i) \leq 3m(\cup I_{n_j})$.
- (Hardy-Littlewood en dimension 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Mf(x) = \sup_{h>0} \left\{ \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \right\}.$$

La fonction Mf est appelée fonction maximale de Hardy-Littlewood. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\lambda m(\{Mf > \lambda\}) \leq \int_{\mathbb{R}} f(t) dt.$$

Indication : Utiliser la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue puis le lemme de Vitali.

- (Théorème de différentiation de Lebesgue en dimension 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et soit $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, montrer que F est dérivable presque partout et que $F'(x) = f(x)$ pour presque tout x .

Indication : Utiliser la densité des fonctions continues dans L^1 et Hardy-Littlewood.

Exercice 3. Soit μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que les intervalles bornés soient de mesure finie (on parle de mesure de Radon). On note $F_\mu(x) = \mu([0, x])$ si $x \geq 0$ et $F_\mu(x) = -\mu([x, 0])$ si $x < 0$.

- Montrer que si $\mu \perp m$ alors F_μ est dérivable presque partout et que $F'_\mu(x) = 0$ pour presque tout x .

Indication : Fixer $\varepsilon > 0$ et montrer que $\{x \in \mathbb{R} : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{F_\mu(x+h) - F_\mu(x)}{h} > \varepsilon\}$ est de mesure nulle en raisonnant de la même manière que pour Hardy-Littlewood.

- En général, montrer que F_μ est dérivable presque partout et que sa dérivée est la densité de la partie absolument continue de μ .

Exercice 4 (Fonctions absolument continues). Soit $[a, b]$ un intervalle compact et $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que F est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles disjoints $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ inclus dans $[a, b]$ et vérifiant $\sum (b_i - a_i) \leq \delta$ on a $\sum |F(b_i) - F(a_i)| \leq \varepsilon$.

- Montrer que les fonctions absolument continues sont continues et à variation bornée. Montrer que les fonctions lipschitziennes sont absolument continues. Montrer que les deux réciproques sont fausses.

2. On suppose F continue à droite, et on note μ la mesure associée à F , à savoir l'unique mesure signée sur $[a, b]$ vérifiant $\mu([a, x]) = F(x) - F(a)$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que F est absolument continue si et seulement si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$.
3. En utilisant l'exercice précédent, montrer que F est absolument continue si et seulement si F est dérivable presque partout, F' est intégrable, et F vérifie le théorème fondamental de l'analyse : $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt$ pour tous $x \in [a, b]$.

Exercice 5. Dans le TD précédent on a affirmé que si une fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée alors elle est dérivable presque partout. On va maintenant démontrer ce résultat.

1. Montrer qu'on peut supposer F croissante. On supposera désormais que c'est le cas.
2. En utilisant l'exercice 2, montrer le résultat si F est continue à droite.
3. Montrer que F n'admet qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.
4. Montrer qu'il existe une fonction continue et croissante F_c , une suite (x_n) d'éléments deux à deux distincts de $[a, b]$, deux suites $(a_n), (b_n)$ de réels positifs, sommables toutes les deux, telles que

$$F = F_c + \sum_{n \geq 1} a_n \mathbf{1}_{]x_n, +\infty]} + \sum_{n \geq 1} b_n \mathbf{1}_{[x_n, +\infty[},$$

et conclure.