

Intégration et probabilités
TD7 : Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 1 (Fonctions à variation bornée). Soit $[a, b]$ un intervalle et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est à variation bornée si

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \right\} < +\infty,$$

le sup étant pris sur toutes les subdivisions $a \leq t_0 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq b$ de l'intervalle $[a, b]$.

1. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est à variation bornée. Donner un exemple de fonction continue qui ne soit pas à variation bornée.
2. On suppose que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue à droite. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est à variation bornée ;
 - (ii) f s'écrit comme la différence d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ;
 - (iii) Il existe une mesure signée μ sur $[a, b]$ (i.e. différence de deux mesures positives) telle que $f(x) - f(a) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 2 (Théorème fondamental de l'analyse). Soit $[a, b]$ un intervalle et soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. On admettra qu'une telle fonction est dérivable presque partout.

1. Montrer que si f est croissante alors $\int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a)$ et montrer par un exemple simple que l'inégalité peut être stricte.
2. On suppose que f est lipschitzienne. Montrer qu'on a l'égalité $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.
3. Montrer en revanche que le résultat est faux si f est seulement supposée continue.

On se donne maintenant une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on ne suppose plus forcément à variation bornée. En revanche on suppose que f est dérivable **en tout point** et que sa dérivée est intégrable sur $[a, b]$. Le but est de montrer que le théorème fondamental de l'analyse s'applique dans ce cas.

4. Montrer que pour toute fonction g intégrable sur \mathbb{R} , on a

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} v(x) dx; v \text{ semi-continue inférieurement, } v \geq g \right\}$$

Indication : Utiliser la régularité de la mesure de Lebesgue.

5. Soit v une fonction s.c.i. supérieure ou égale à f' sur $[a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in [a, b]$ on pose

$$F(x) = \int_a^x v(t) dt - f(x) + f(a) + \varepsilon(x - a).$$

Montrer que $F \geq 0$ sur $[a, b]$ et conclure.

6. En déduire que f est à variation bornée.