École Normale Supérieure Année 2019/20

Intégration et probabilités
TD6 : Les théorèmes de convergence
`version 2`

Exercice 1 (Uniforme continuité de l'intégrale)**.** Soit $(E, ,\mu)$ un espace de probabilité et soit f une fonction intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \leq \eta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions measurables à valeurs réelles. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \left(\int_E f_n \, d\mu \right) = \int_E \left(\sum_{n \geq 0} f_n \right) \, d\mu$$

dans les deux cas suivants :

(i) $f_n \geq 0$ p.p. pour tout n ;

(ii) $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ est intégrable.

Exercice 3. 1. Montrer que pour tout entier n

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, dt = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}t} dt.$$

2. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 4. On rappelle la définition de la constante γ d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\int_0^1 x^n \ln(1-x) \, dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

2. Calculer de deux manières la limite de $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \ln(x)\,dx$ et en déduire que

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\,dx.$$

Exercice 5 (Uniforme intégrabilité)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. **On suppose que μ est une mesure finie**. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles.

1. Montrer par un exemple qu'on peut avoir $f_n \to f$ p.p. et $\int_E |f_n - f|\,d\mu \to 0$ sans que la suite (f_n) soit dominée par une fonction intégrable. Autrement dit la condition donnée par le théorème de convergence dominée est suffisante pour avoir convergence des intégrales, mais elle n'est pas nécessaire.

Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite *uniformément intégrable* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \int_{\{|f| \geq C\}} |f|\,d\mu \leq \varepsilon.$$

2. Montrer que toute famille finie de fonctions intégrables est uniformément intégrable.
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille uniformément intégrable, alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\int_E |f|\,d\mu \leq C$ pour toute $f \in \mathcal{F}$, mais que la réciproque est fausse.
4. Montrer que si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \forall f \in \mathcal{F},\ \mu(A) < \eta \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon.$$

5. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant $f_n \to f$ presque partout. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (i) $\int_E |f_n - f|\,d\mu \to 0$;
   (ii) La famille $\{f_n,\ n \geq 0\}$ est uniformément intégrable.

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives vérifiant $\int_E f_n\,d\mu \to 0$.

1. Montrer qu'on peut extraire de (f_n) une suite qui converge vers 0 p.p.
2. Montrer par un exemple qu'il est en revanche possible que $(f_n(x))$ ne tende vers 0 pour aucun élément x de E.