

Intégration et probabilités
TD5 : Théorèmes limites pour la marche simple

Exercice 1. On considère la marche simple (S_n) sur \mathbb{Z}

1. (limite locale) On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on ait

$$\left| \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) - \frac{e^{-k^2/n}}{\sqrt{\pi n}} \right| \leq C n^{-\frac{3}{2} + \epsilon}.$$

Indication : On pourra utiliser l'égalité

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

et distinguer les cas $|k| \leq n^{\frac{1}{2} + \epsilon}$ et $|k| \geq n^{\frac{1}{2} + \epsilon}$.

2. (limite centrale) Montrer que pour tous réels $x < y$ on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [x, y]\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^y e^{-t^2/2} dt.$$

3. Plus précisément montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [x, y]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^y e^{-t^2/2} dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

4. (Berry-Esseen) Montrer qu'on peut même rendre le $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ uniforme en x et y .

Indication : Peut-être que c'est mieux de faire d'abord l'exercice 2.

Exercice 2. La fonction $g(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$ est appelée densité gaussienne.

1. Montrer en utilisant l'exercice précédent (mais pas la dernière question) que g est une densité de probabilité, au sens où $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = 1$.

On s'intéresse dans cet exercice à la queue de distribution

$$\Psi(x) = \int_x^{+\infty} g(t) dt.$$

2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t} g(t) dt = e^{\lambda^2/2}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
 3. En déduire que $\Psi(x) \leq e^{-x^2/2}$ pour tout $x \geq 0$.

4. Par un calcul direct, montrer qu'on peut améliorer l'inégalité précédente et obtenir $\Psi(x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$.

5. En raisonnant de manière similaire à la question 2 montrer que la marche simple S_n vérifie

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq e^{-x^2/(2n)}, \quad \forall x \geq 0.$$

6. En faisant une intégration par parties, montrer que $\Psi(x) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x}$.

7. Plus généralement montrer que pour tout entier k

$$\Psi(x) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \dots + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{x^{2k+1}} \right).$$

Exercice 3 (Loi de l'arcsinus). Soit R_n le dernier zéro de la marche au temps n (voir le TD précédent). Montrer que pour tous $x < y$ compris entre 0 et 1 on a

$$\mathbb{P} \left(\frac{R_n}{n} \in [x, y] \right) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_x^y \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

La mesure ayant pour densité $\frac{\mathbf{1}_{]0,1[}(t)}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$ est appelé loi de l'arcsinus. Pourquoi ?