École Normale Supérieure Année 2019/20

Intégration et probabilités
TD4 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$
`version 2`

On appelle chemin de longueur n une suite $s_0, \ldots, s_n$ d'entiers vérifiant $s_i - s_{i-1} = \pm 1$ pour tout i. On considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $S_0, S_1, \ldots$ est une suite aléatoire d'entiers, telle que pour tout entier n et pour tout chemin de longueur n vérifiant $s_0 = 0$ on ait

$$\mathbb{P}(S_0 = s_0, \ldots, S_n = s_n) = 2^{-n}.$$

Autremenent dit tous les chemins de longueur n partant de 0 sont équiprobables.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier relatif k on a
$$\mathbb{P}(S_n = k) = 2^{-n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}},$$
avec la convention que $\binom{n}{x} = 0$ si x n'est pas un entier compris entre 0 et n.

Cette probabilité sera notée $p_{n,k}$ dans la suite.

2. Donner un équivalent simple de $p_{2n,0}$ quand n tend vers l'infini.
3. (Principe de réflexion) Soient k et l deux entiers positifs, montrer que le nombre de chemins de longueur n qui vont de k à l et qui touchent 0 est égal au nombre de chemins de longueur n allant de $-k$ à l.
4. (Théorème du scrutin) Si dans une élection à deux candidats, le premier candidat l'emporte par p voix contre q, montrer que la probabilité que le premier candidat soit resté strictement en tête du début à la fin du dépouillement est $\frac{p-q}{p+q}$.

On s'intéresse au temps de retour en 0 de la marche :

$$T = \inf\{n \geq 1 \colon S_n = 0\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

5. Montrer que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = p_{2n,0},$$
puis que $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1} p_{2n,0}$.
6. En déduire en particulier le temps de retour en 0 est fini presque surement mais que sa valeur moyenne est infinie.

On va maintenant s'intéresser à la loi du dernier zéro de la marche au temps $2n$. Autrement dit on fixe un entier n et on pose

$$R_{2n} = \sup\{k \leq 2n \colon S_k = 0\}.$$

7. Montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$ on a

$$\mathbb{P}(R_{2n} = 2k) = p_{2k,0} p_{2(n-k),0},$$

   et donner un équivalent de cette probabilité lorsque n, k et $n-k$ tendent vers l'infini.

On remarque en particulier que cette loi est symétrique par rapport au milieu de l'intervalle : $\mathbb{P}(R_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(R_{2n} = 2n - 2k)$ et qu'elle affecte plus de poids aux bords qu'au milieu de l'intervalle.

On s'intéresse maintenant aux changements de signe de (S_n). On dit qu'il y a un changement de signe à l'instant $k \geq 1$ si S_{k-1} et S_{k+1} sont de signes différents, ce qui implique en particulier que $S_k = 0$ et que k est pair. On note ξ_{2n+1} le nombre de changements de signe qui ont lieu avant l'instant $2n+1$. On va déterminer $\mathbb{P}(\xi_{2n+1} = r)$ pour tout r.

8. On note ζ_{2n} le nombre de fois que la marche croise le niveau -1 avant l'instant $2n$. Montrer que $\mathbb{P}(\xi_{2n+1} = r) = \mathbb{P}(\zeta_{2n} = r)$ pour tout r.
9. Montrer que $\mathbb{P}(\zeta_{2n} = 0) = 2p_{2n+1,1}$.
10. En raisonnant par récurrence sur r, montrer que $\mathbb{P}(\zeta_{2n} = r) = 2p_{2n+1,2r+1}$.
11. En déduire que quelle que soit la longueur du chemin, la probabilité d'avoir r changements de signes est une fonction décroissante de r. En particulier le plus probable est de n'avoir eu aucun changement de signe.
12. Montrer enfin que le nombre moyen de changements de signe au temps $2n+1$ est de l'ordre de $\sqrt{n}$.