École Normale Supérieure Année 2019/20

Intégration et probabilités
TD3 : Construction de mesures II
`version 2`

Exercice 1 (Régularité des mesures)**.** Soit E un espace ~~topologique~~ métrique. On appelle tribu borélienne sur E la tribu engendrée par les ouverts de E. On la note $\mathcal{B}(E)$. Les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont dits *boréliens*. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{B}(E))$.

1. Montrer que si μ est finie, alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$, on a
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\} \tag{1}$$
$$= \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé}, F \subset A\}. \tag{2}$$
Indication : Montrer que l'ensemble des boréliens A vérifiant les deux égalités est une tribu.
2. Montrer que si μ est seulement supposée σ-finie la deuxième égalité reste vraie, mais la première est en général fausse.
3. Montrer néanmoins que la mesure de Lebesgue vérifie les deux propriétés.

La propriété (1) est appelée *régularité extérieure*, la *régularité intérieure* étant la propriété obtenue en remplaçant le mot "fermé" par "compact" dans la propriété (2). Enfin, on dit qu'une mesure est régulière si elle est à la fois intérieurement et extérieurement régulière.

4. Proposer une condition suffisante sur E pour que la propriété (2) implique la régularité intérieure, et en déduire que la mesure de Lebesgue est régulière.

Exercice 2. En considérant la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, montrer que le lemme de classe monotone peut-être mis en défaut si on ne suppose pas les mesures σ-finies.

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique et soit μ une mesure extérieure sur E. On suppose de plus que tout $A, B \subset E$ on a
$$d(A, B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$
Montrer que la tribu des ensembles μ-mesurables (théorème de Carathéodory) contient la tribu borélienne de E.
Indication : Commencer par montrer que sous ces hypothèses, si U est un ouvert et $U_n = \{x \in E \colon d(x, U^c) > 1/n\}$ pour tout n alors $\mu(U_n) \nearrow \mu(U)$.

Exercice 4 (Mesure de Hausdorff)**.** Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ et $r > 0$ on pose

$$\mathcal{H}^{s,r}(A) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} r_i^s : A \subset \bigcup_{i \geq 1} B(x_i, r_i);\ r_i \leq r\, \forall i \right\},$$

en notant $B(x_i, r_i)$ la boule euclidienne centrée en x_i et de rayon r_i. L'infimum est donc pris sur tous les recouvrements dénombrables de A par des boules de rayon inférieur à r. Ensuite on pose

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{r \to 0} \mathcal{H}^{s,r}(A).$$

1. Montrer que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ sont $\mathcal{H}^0$-mesurables et que $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^n$.
3. En utilisant l'exercice précédent, montrer que les boréliens de $\mathbb{R}^n$ sont $\mathcal{H}^s$-mesurables.

On admet l'existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, qui est l'unique mesure $\mathcal{L}^n$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ vérifiant

$$\mathcal{L}^n \left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

pour tous $a_1 < b_2, \ldots, a_n < b_n$.

4. Pour $r > 1$ on note $N(r)$ le nombre minimal de boules de rayon r qu'il faut pour recouvrir la boule de rayon 1. Montrer que

   $$\left(\frac{1}{r} \right)^n \leq N(r) \leq \left(\frac{3}{r} \right)^n.$$

   Indication : Pour la borne supérieure on pourra considérer une partie r-séparée de la boule de cardinal maximal.
5. Montrer que $\mathcal{H}^s \equiv 0$ si $s > n$.
6. Montrer que $\mathcal{H}^n(B(0,1)) \in [1, 3^n]$ puis qu'il existe une constante $c_n \in]0, +\infty[$ telle que $\mathcal{H}^n(A) = c_n \mathcal{L}_n(A)$ pour tout borélien A.
7. Montrer que $c_n = 1/\mathcal{L}_n(B(0,1))$, ou, de manière équivalente, que $\mathcal{H}^n(B(0,1)) = 1$.
8. Soit $s < t$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

   $$\mathcal{H}^s(A) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^t(A) = 0.$$

On en déduit que si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ il existe un réel $d \in [0; n]$, appelé dimension de Hausdorff de A, tel que $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ pour $s < d$ et $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour $s > d$.

9. Montrer qu'un sous-espace de dimension k est de dimension de Hausdorff k.
10. Déterminer la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor.
    Indication : Il faut d'abord deviner le résultat, la majoration de la dimension est alors aisée. Pour la minoration, on peut ensuite se servir de la mesure μ construite à la toute fin du TD précédent.