École Normale Supérieure Année 2019/20

Intégration et probabilités
TD2 : Construction de mesures

Exercice 1 (Mesure de Lebesgue)**.** On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont dits boréliens.

1. Montrer que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont boréliens.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies d'intervalles, en autorisant les intervalles non bornés. Pour $A \in \mathcal{A}$ on écrit $A = \bigcup_{i=1}^{m} I_j$, où les I_j sont des intervalles disjoints, et on pose

$$\mathcal{L}_0(A) = \sum_{j=1}^{n} |I_j|,$$

en notant $|I|$ la longueur d'un intervalle I (celle-ci pouvant être infinie).

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre.
3. Montrer que $\mathcal{L}_0$ est bien définie et que $\mathcal{L}_0$ est additive sur $\mathcal{A}$.
4. Soit I un intervalle et soit (I_j) une suite d'intervalles vérifiant $I \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j$. Montrer que
$$|I| \leq \sum_{j\geq 1} |I_j|.$$
5. En déduire que $\mathcal{L}_0$ est σ-additive sur $\mathcal{A}$.
6. Montrer qu'il existe une unique mesure $\mathcal{L}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\mathcal{L}(I) = |I|$ pour tout intervalle I. Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue.
7. Montrer que si A est borélien et $x \in \mathbb{R}$, alors $x+A$ est borélien et $\mathcal{L}(x+A) = \mathcal{L}(A)$. Autrement dit, le mesure de Lebesgue est invariante par translation.

Exercice 2 (Un ensemble non borélien)**.** On définit une relation d'équivalence sur $[0, 1]$ en posant $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. On choisit ensuite un élément par classe d'équivalence et on note A l'ensemble ainsi obtenu. Montrer que A n'est pas borélien.

Exercice 3 (Ensemble de Cantor)**.** On définit une suite d'ensembles $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $K_0 = [0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$, l'ensemble K_n est obtenu en retirant à K_{n-1} le tiers central (ouvert) de chacun des intervalles qui composent K_n. Par exemple $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Ensuite on pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact d'intérieur vide sans point isolé.
2. Montrer que K est à la fois non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 4 (Fonction de répartition)**.** Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

La fonction F_μ est appelée fonction de répartition de μ.

1. Montrer que F est croissante, continue à droite et vérifie $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
2. Montrer que $\mu(]-\infty, x[) = F(x-)$ pour tout x, en notant $F_\mu(x-)$ la limite à gauche de F en x.
3. Montrer que F_μ caractérise μ.
4. Réciproquement, montrer que si F est une fonction qui croît de 0 à 1 en étant continue à droite, alors il existe une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont c'est la fonction de répartition.
   Indication : Procéder de manière similaire que pour la construction de la mesure de Lebesgue.

Exercice 5 (L'escalier du diable)**.** On considère $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par :

— Pour $x \in [0, 1]$, $F_0(x) = x$;

— La fonction F_1 est la fonction qui envoie $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ sur $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ respectivement, et qui est affine entre chacun de ces points ;

— De même on passe de F_n à F_{n+1} en remplaçant F_n sur chacun des intervalles $[a, b]$ où elle est affine par la fonction qui envoie $a, (2a + b)/3, (a + 2b)/3, b$ sur $F(a), (F(a)+F(b))/2, (F(a)+F(b))/2, F(b)$ respectivement et qui est affine entre chacun de ces points.

1. Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On appelle F la limite. Montrer que F est continue sur $[0, 1]$ et croît de 0 à 1.
2. Montrer que F est dérivable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) et que sa dérivée est identiquement nulle.
3. Soit μ la mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont F est la fonction de répartition (voir l'exercice précédent). Montrer que μ est à la fois diffuse et portée par un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue.