

Intégration et probabilités
TD12 : Lois usuelles

Exercice 1. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire continu à valeurs dans \mathbb{R}^d de densité f . Montrer que les variables X_i sont continues et déterminer leurs densités respectives. Elles sont appelées densités *marginales* de f .

Exercice 2. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme entre deux ouverts U et V de \mathbb{R}^d et soit X un vecteur aléatoire continu à valeurs dans U , au sens où $\mathbb{P}(X \in U) = 1$. Montrer que $\varphi(X)$ est un vecteur continu et exprimer sa densité en fonction de celle de X et de φ .

Exercice 3. Soient X et Y deux variables continues de densité respectives f et g .

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si le vecteur (X, Y) est continu de densité $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$.
2. Montrer alors que $X + Y$ est une variable continue de densité $f * g$.

Exercice 4. On dit que X est une variable gaussienne s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que X soit une variable continue de densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-m)^2/2\sigma}$. On dit aussi que X suit la loi normale de paramètres m et σ , notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

1. Vérifier que cette fonction est bien une densité de probabilité, et montrer que $\mathbb{E}[X] = m$ et $\text{var}(X) = \sigma$. Déterminer aussi la fonction caractéristique de X .
2. Montrer que si X_1, \dots, X_n sont des variables gaussiennes indépendantes alors $X_1 + \dots + X_n$ est encore une variable gaussienne et déterminer ses paramètres.

Exercice 5 (Loi Gamma). Soient $\alpha, \lambda > 0$, on appelle loi Gamma de paramètres α et λ , notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, la mesure de probabilité sur \mathbb{R} ayant pour densité

$$x \mapsto \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Dans le cas $\alpha = 1$, on parle de loi exponentielle de paramètre λ .

1. Soit X de loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$, déterminer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique de X .
2. (formule des compléments) Soient X et Y deux variables indépendantes, suivant respectivement la loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\beta, \lambda)$. Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes, que $X + Y$ suit la loi $\Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$ et déterminer la densité de $\frac{X}{X+Y}$.
3. En déduire en particulier que $\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.
4. Soient X_1, \dots, X_n des gaussiennes standard (i.e. $\mathcal{N}(0, 1)$) indépendantes. Montrer que $\sum_{i=1}^n X_i^2$ suit la loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Cette loi est appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté.

Exercice 6 (Loi de Cauchy). On appelle loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ la mesure de probabilité sur \mathbb{R} ayant pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$.

1. Soit X, Y deux gaussiennes standard indépendantes. Montrer que $\frac{X}{Y}$ suit la loi de Cauchy de paramètre 1.

2. Montrer que la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre a est $y \mapsto e^{-a|y|}$.
3. En déduire que la somme de deux variables de Cauchy indépendantes est encore une variable de Cauchy.
4. (Pour les courageux.ses) Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

Exercice 7 (Loi de Poisson). On dit qu'une variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si X est à valeurs dans \mathbb{N} et vérifie $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ pour tout entier n .

1. Déterminer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique de X .
2. Montrer que la somme de deux variables de Poisson indépendantes suit encore une loi de Poisson. Donner deux démonstrations : en utilisant la fonction caractéristique et par un calcul direct.
3. On se donne une suite i.i.d. (τ_i) de variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ , qui modélise les intervalles de temps entre deux passages de bus à un arrêt : le premier bus passe au temps τ_1 , le deuxième au temps $\tau_1 + \tau_2$, etc. ... Montrer que le nombre de bus qui sont passés à l'instant t suit une loi de Poisson de paramètre λt .

Pour tout entier n on se donne une variable X_n suivant une loi de Poisson de paramètre λn et on pose $Y_n = \frac{X_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$.

4. En utilisant la question 2, montrer que (Y_n) converge en loi vers la gaussienne standard.
5. En déduire que pour tout $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \lambda \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

6. Montrer aussi que $\mathbb{E}[(Y_n)_-] \rightarrow \mathbb{E}[G_-]$, où G est une gaussienne standard, et retrouver ainsi la formule de Stirling.

Soit (X_i) une suite i.i.d. de variables aléatoires et soit N une variable de Poisson de paramètre λ , indépendante de la suite (X_i) . On pose

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i.$$

On dit que Z suit une loi de Poisson composée.

7. Montrer que si X_1 est intégrable alors Z aussi et exprimer $\mathbb{E}[Z]$ en fonction de $\mathbb{E}[X_1]$. Montrer un résultat analogue pour la variance de Z .
8. Exprimer la fonction caractéristique de Z en fonction de celle de X_1 .
9. Montrer que si X_1 est une variable de Bernoulli (c'est-à-dire à valeurs dans $\{0, 1\}$) alors Z suit encore une loi de Poisson.