

Intégration et probabilités
TD11 : Convolution et transformée de Fourier

Exercice 1 (Régularisation par convolution). Soient f et g intégrables sur \mathbb{R}^d . On pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy.$$

1. Montrer que $f * g$ est bien définie presque partout. Montrer que $f * g$ est intégrable et que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx.$$

2. Si f est intégrable et g continue bornée, montrer que $f * g$ est bien définie partout et que $f * g$ est continue bornée.

Soit φ une fonction C^∞ positive et d'intégrale 1. On suppose aussi que φ est bornée et que ses dérivées partielles de tout ordre sont bornées.

3. Montrer qu'une telle fonction φ existe, montrer qu'on peut même prendre φ à support compact.
4. Montrer que pour toute f intégrable $f * \varphi$ est C^∞ et que

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_d}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_d^{i_d}} (f * \varphi) = f * \left(\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_d}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_d^{i_d}} \varphi \right)$$

5. On pose $\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx)$. Montrer que pour toute $f \in L^1$ on a $\varphi_n * f \rightarrow f$ dans L^1 .
Indication : Commencer par le cas f continue à support compact.
6. Montrer que les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans L^1 .

Exercice 2 (Transformée de Fourier). Soit f intégrable sur \mathbb{R}^d . Pour $y \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx$$

1. Montrer que \widehat{f} continue bornée. Plus précisément montrer que $|\widehat{f}(y)| \leq \|f\|_1$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et toute $f \in L^1$.
2. Montrer que si f et g sont intégrables alors $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.
3. On note τ_h l'opérateur de translation : $\tau_h f(x) = f(x + h)$. Montrer que pour $f \in L^1$ et $y \neq 0$ on a en posant $h = -\frac{\pi y}{|y|^2}$

$$\widehat{f}(y) = -\widehat{\tau_h f}(y).$$

4. (Lemme de Riemann-Lebesgue) En déduire que $\widehat{f}(y)$ tend vers 0 en l'infini, pour toute $f \in L^1$.
Le but de la fin de l'exercice est de montrer la formule d'inversion de Fourier : si $f \in L^1$ et si $\widehat{f} \in L^1$ alors $f = \mathcal{F}(\widehat{f})$ en notant

$$\mathcal{F}(u)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, y \rangle} u(y) dy.$$

5. Soit $\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2}e^{-|x|^2/2}$ la densité gaussienne standard sur \mathbb{R}^d .
6. Montrer que $\widehat{\varphi}(y) = e^{-|y|^2/2}$.
Indication : Commencer par se ramener à la dimension 1, et montrer le résultat de deux manières différentes : en montrant que $\widehat{\varphi}$ vérifie une équation différentielle facile à résoudre ou en calculant les moments de la loi gaussienne par récurrence et en faisant une interversion série intégrale.
7. Soit f intégrable. Montrer que $\widehat{f * \varphi}$ est intégrable et que $\mathcal{F}(\widehat{f * \varphi}) = f * \varphi$.
8. Conclure en utilisant la suite (φ_n) de l'exercice précédent.
9. Montrer que la transformée de Fourier est injective : si f et g sont deux fonctions intégrables vérifiant $\widehat{f} = \widehat{g}$ alors $f = g$ p.p.
Remarque : Dans cette dernière question on ne suppose pas que \widehat{f} et \widehat{g} sont intégrables.

Exercice 3 (Semi-groupe de la chaleur). Pour $t > 0$ on pose $\varphi_t : x \in \mathbb{R}^d \mapsto (2\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/2t}$. Pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$ on pose $P_t f = \varphi_t * f$.

1. Montrer que $\varphi_t * \varphi_s = \varphi_{t+s}$ et en déduire que $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ (propriété de semi-groupe).
2. Montrer par ailleurs que $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$ et $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$. On parle de semi-groupe de Markov.
3. Montrer que si f est intégrable alors $P_t f$ aussi et $\int_{\mathbb{R}^d} (P_t f) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f dx$. On dit que la mesure de Lebesgue est invariante pour (P_t) .
4. Montrer que P_t s'étend en une contraction sur L^p pour tout $p \geq 1$. C'est-à-dire qu'on peut définir $P_t f$ pour $f \in L^p$ et qu'on a de plus $\|P_t f\|_p \leq \|f\|_p$.
5. Montrer que pour $f, g \in L^2$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} (P_t f) g dx = \int_{\mathbb{R}^d} f (P_t g) dx$. On dit que la mesure de Lebesgue est réversible.
6. Montrer que tout $p \in [1; +\infty[$ et pour toute $f \in L^p$ on a $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f = f$ dans L^p .
Indication : Encore une fois on peut commencer par le cas f continue à support compact.
7. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\partial_t \varphi_t = \frac{1}{2} \Delta \varphi_t$ en notant Δ le Laplacien en espace : $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et en déduire que $\partial_t P_t f = \frac{1}{2} \Delta P_t f$ pour toute $f \in L^p$. Autrement dit $(P_t f)$ est la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale f .

Exercice 4 (Théorème de Plancherel). Montrer que la transformée de Fourier s'étend en un opérateur continu sur L^2 et qu'on a de plus $\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2$ pour toute $f \in L^2$. Autrement dit, à un facteur multiplicatif près, la transformée de Fourier est une isométrie sur L^2 .

Indication : Commencer par montrer $\|\widehat{P_t f}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|P_t f\|_2$ où (P_t) est le semigroupe de la chaleur.