

Intégration et probabilités
TD10 : Espaces produits, théorème de Fubini

Exercice 1. Montrer par un exemple simple que le théorème de Fubini peut être mis en défaut pour des mesures non σ -finies.

Exercice 2. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, la mesure μ étant supposée σ -finie et soit f mesurable positive.

1. Montrer que

$$\int_E f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(f > t) dt.$$

2. Plus généralement montrer que si $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $g(0) = 0$ alors

$$\int_E g \circ f d\mu = \int_0^\infty g'(t) \mu(f > t) dt.$$

Exercice 3. Montrer soigneusement que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx.$$

Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 4. Montrer que $\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ . Montrer néanmoins que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

en remarquant que $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} dt$ et en appliquant Fubini.

Exercice 5 (Intégration en coordonnées polaires). Soit f une fonction mesurable positive sur \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

2. Calculer de deux manières $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ et en déduire que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 6 (Mesure uniforme sur la sphère). On se place sur \mathbb{R}^d muni de la mesure de Lebesgue m_d et on note $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^d .

1. Pour $A \subset \mathbb{S}^{d-1}$ on note $[0, 1]A = \{rx : r \in [0, 1], x \in A\}$. Montrer que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ alors $[0, 1]A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $s_{d-1}: A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}) \mapsto d m_d([0, 1]A)$ est une mesure finie sur \mathbb{S}^{d-1} qui est de plus invariante par rotation.

3. (Intégration en coordonnées polaires sur \mathbb{R}^d) Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} f(r\theta) r^{d-1} dr s_{d-1}(d\theta).$$

Indication : On pourra appliquer le lemme de classe monotone à un π -système bien choisi.

4. (Application 1) Calculer de deux manières $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} dx$ et en déduire une expression pour la mesure de la boule unité en dimension d faisant intervenir la fonction Γ d'Euler. En déduire l'ordre de grandeur du rayon de la boule de volume 1 en dimension d .
5. (Application 2) À quelle condition sur α et d la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto |x|^{-\alpha}$ est-elle intégrable au voisinage de 0? Au voisinage de $+\infty$?

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles, soit \mathcal{A} une tribu sur E et \mathcal{B} une tribu sur F .

1. Montrer que les sections d'un ensemble mesurable pour la tribu produit sont mesurables. Autrement dit, si $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ alors $C^y := \{x \in E: (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$ pour tout $y \in F$ et $C_x := \{y \in F: (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in E$.
2. Sur \mathbb{R} on considère la tribu \mathcal{A} engendrée par les singletons. Montrer que la diagonale de \mathbb{R}^2 n'appartient pas à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ et en déduire que la réciproque de l'assertion précédente est fausse.

Exercice 8 (Produit de mesures de Lebesgue). Rappelons que la tribu de Lebesgue sur \mathbb{R}^k , notée $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ est la complétion de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ pour la mesure de Lebesgue. C'est-à-dire la tribu constituée des ensembles coincés entre deux boréliens de même mesure.

1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$.
2. Montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^l) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+l})$ mais que l'inclusion est stricte.