

Intégration et probabilités
TD1 : Tribus et mesures

Exercice 1. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et (A_n) une suite d'ensembles mesurables, montrer que

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum \mu(A_n).$$

Exercice 2. 1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu, mais qu'une union de tribus n'est pas forcément une tribu.
2. Pour chaque entier n soit \mathcal{F}_n la tribu de \mathbb{N} engendrée par l'ensemble $\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}$. Montrer que (\mathcal{F}_n) est une suite croissante de tribus mais que $\bigcup \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 3. Soit E un ensemble et soit \mathcal{A} une tribu de E .

1. Montrer que si la tribu \mathcal{A} est finie, alors il existe une partition finie A_1, \dots, A_n de E qui engendre \mathcal{A} . Montrer de plus qu'on a alors

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i : I \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

2. En utilisant des idées similaires montrer qu'une tribu infinie est forcément non dénombrable.

Exercice 4. Soit E un ensemble.

1. Décrire la tribu \mathcal{A} engendrée par les singletons de E .
2. Si $E = \mathbb{R}$, donner un exemple simple d'ensemble qui ne soit pas dans \mathcal{A} .

On suppose dorénavant que E est infini non dénombrable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini ou dénombrable} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{A}) , et qu'elle ne charge pas les singletons. On dit que \mathbb{P} est diffuse.
4. Décrire toutes les mesures de probabilité sur (E, \mathcal{A}) .

Exercice 5 (Additivité et σ -additivité). On se place sur \mathbb{N} muni de sa tribu complète $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour $A \subset \mathbb{N}$ on pose

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini;} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que μ est additive mais pas σ -additive.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels, on pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

1. Montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, en autorisant les valeurs d'adhérence infinies.
2. Vérifier que a_n converge vers $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

On considère maintenant un ensemble E et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles et on pose

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

3. Décrire ces ensembles avec des mots.
4. Relier leurs fonctions indicatrices aux fonctions indicatrices des A_n .
5. Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ dans les cas suivants.
 - (i) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés.
 - (ii) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =] - 1 - 1/(3n), 2]$.

On se donne maintenant une tribu \mathcal{E} et une mesure μ sur E , et on suppose que les A_n sont tous mesurables.

6. Montrer que

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

et montrer par un exemple que l'inégalité peut-être stricte.

7. Montrer que si de plus μ est une mesure finie on a aussi

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

mais que l'inégalité est fautive en générale.

8. (*Lemme de Borel-Cantelli*) On suppose que $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0.$$